MA1 – písemné cvičení (5.-zbytek a 6.) – limita funkce

5. cvičení – II.

1) Z definice limity ukažte:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)=4$ (obecně $\lim\limits_{x\to a}(3x-2)=3a-2$, $a\in R$

tj. fce $f(x)=3x-2$ je spojitá v R)

Máme ukázat (dle definice), že platí:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L\in R \equiv \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x:\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon;$$

zde $x_0=2$, $L=4$, tj. máme ukázat (tj. „najít" δ k danému $\varepsilon>0$)

$$(?)\ \forall\varepsilon\ \exists\delta>0\ \forall x:\quad 0<|x-2|<\delta \Rightarrow |(3x-2)-4|<\varepsilon \quad (*)$$

Jak toto lze „udělat"? – z podmínky $|(3x-2)-4|<\varepsilon$ najít, (obecně $|f(x)-L|<\varepsilon$)

Zde aspoň krátký návod:

pro která x podmínka platí – tj. technicky řešit nerovnici $(*)$ pro zvolené $\varepsilon>0$ pro x!

(zpravidla dost obtížné – proto se raději obecně s pomocí definice dokážou pravidla (věty) a vlastnosti limit – a pak se dle těchto vět limity „počítají")

Zde – jednoduchý příklad na „začátek":

$|(3x-2)-4|<\varepsilon \iff 3|x-2|<\varepsilon$, což bude pro $|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$;

tedy: zvolíme-li $\varepsilon>0$, pak lze vzít $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, a pak:

$\forall\ 0<|x-2|<\delta\left(=\frac{\varepsilon}{3}\right)$ je $3|x-2|=|(3x-2)-4|<\varepsilon$ (cbd.)

(zde lze i $x=2$)

b) ? $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0$ (jednostranná limita) $\iff$

ke zvolenému $\varepsilon > 0$ máme „najít" $\delta > 0$ tak, aby platilo:

$$x \in [0, \delta) \implies |\sqrt{x} - 0| (= \sqrt{x}) < \varepsilon$$

a opět: má-li být (*) $\sqrt{x} < \varepsilon$, pak $x < \varepsilon^2 = \delta$ (– ano?)
(řešení nerovnosti (*))

a ověření:

$$0 < x < \varepsilon^2 \implies \sqrt{x} < \varepsilon \quad \text{cbd.}$$

c) nevlastní limita: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$:

Def. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \equiv \forall K$ (>0 stačí) $\exists \delta > 0 \ \forall x$:
$$0 < |x-a| < \delta \implies f(x) > K$$

zde $a = 0$: tj. máme k lib. $K > 0$ najít $\delta > 0$ tak, aby platilo:

$$0 < |x| < \delta \implies \frac{1}{x^2} > K$$ – opět k δ „přijdeme"

a nerovnosti $\underset{x \neq 0}{\frac{1}{x^2} > K}$: $x^2 < \frac{1}{K} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{K}}$ a $x \neq 0$

tj. je „vidět", že lze zvolit $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$: pak,

je-li $0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{K}}$, je $0 < x^2 < \frac{1}{K}$ a $\frac{1}{x^2} > K$ (cbd.)

d) <u>vlastní limita v „nevlastním" bodě</u> : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$;

Máme ukázat (dle definice): $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$

$\forall \varepsilon>0\ \exists k\ \forall x>k$: $|f(x)-L|<\varepsilon$

zde $\forall \varepsilon>0\ \exists k\ \forall x>k$ (stačí $k>0$) : $\frac{1}{x^2}<\varepsilon$;

zvolme $\varepsilon>0$, má-li být $\frac{1}{x^2}<\varepsilon$, pak $x^2>\frac{1}{\varepsilon}$ a $x>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

(stačí „uvažovat" $x>0$ – „jdeme" k $+\infty$!)

Tedy opět: <u>k $\varepsilon>0$ vezmeme $k=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$</u> a potom platí:

$$x>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(>0) \Rightarrow x^2>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{x^2}<\varepsilon \quad \text{(cbd.)}$$

(fce $y=x^2 \nearrow$ v $(0,+\infty)$)

<u>A vezměme ještě „důkazy" limit z definice „ze cvičení 6)</u>

<u>cv. 6, příklad 1.</u>

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$ (nevlastní limita v nevlastním bodě)

Máme ukázat:

definice $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$: $\forall K(>0)\ \exists k(>0)\ \forall x>k \Rightarrow f(x)>K$

Tedy zde: zvolíme-li $K(>0)$, můžeme najít $k(>0)$ tak, aby platilo:

$$x>k \Rightarrow \sqrt{x}>K \quad (*)$$

a opět z (*) by mělo být <u>$x>K^2=k$</u> (tj. $k=K^2$)

je-li $x>K^2>0 \Rightarrow \sqrt{x}>K$ cbd.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\sin x = 0$:

Máme ukázat, že platí: $\forall \varepsilon>0\ \exists k(>0)\ \forall x>k : \left|\frac{1}{x^2}\sin x\right|<\varepsilon$

tedy vyčíst z nerovnosti (*) $\left|\frac{1}{x^2}\sin x\right|<\varepsilon$ příslušné $k(>0)$ asi těžko najít – opět si pomůžeme zjednodušením nerovnosti (*)
(vede toto k větě o „policajtech")

$$(**)\quad \left|\frac{1}{x^2}\sin x\right| \le \frac{1}{x^2}$$, pak stačí, když najdeme

k $\varepsilon>0$ $k>0$ tak, aby $\frac{1}{x^2}<\varepsilon$:, tj. $x>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}=k$
(viz příklad cv. 5/II, 1 d)

a pak: $x>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}=k \Rightarrow \frac{1}{x^2}<\varepsilon$ a spolu s (**):

$$\underline{\left|\frac{1}{x^2}\sin x\right|} \le \frac{1}{x^2} \underline{<\varepsilon} \quad - \text{cbd.}$$

e) analogicky: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+\sin x) = +\infty$ –

můžeme ukázat, že, zvolíme-li $K>0$, existuje pak $k(>0)$ tak, že pro $x>k$ je $x^2+\sin x>K$

ale $x^2+\sin x \geq x^2-1$, stačí tedy najít k tak,
že pro $x>k$ bude $x^2-1>K$, pak i $x^2+\sin x>K$

a tedy: má-li být $x^2-1>K$, $x^2>K+1$ a $x>\sqrt{K+1}=k$
(předpokládáme $K>0$ – stačí pro $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$)

(opět – tato úvaha „se obecně nazývá" větou o policajtovi, „utíkání" do $+\infty$)

Ve cvičení 5. byly ještě dva „teoretické" příklady –
Př 3* – jako nebyla byla na přednášce (spíše v přednášce 5. je)

a 2, a) $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = 0 \iff \lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$

(užitečné – je většinou snazší odhadovat v definici limity (= 0) $|f(x)|$)

<u>Dk.</u> $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0 \equiv \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x: 0<|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = 0 \equiv \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x: 0<|x-c|<\delta \Rightarrow \big||f(x)|\big|<\varepsilon$

ale $|f(x)| = \big||f(x)|\big|$ – tj. jednoduché (platí $\iff$)

b) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$, $g(x)$ je omezená v nějakém $P(c,\delta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = 0$

– „důkaz" bude asi „podobný" řešení příkladu „s důkazem (dle definice), že $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}\sin x = 0$

(zkusíme za dú).

<u>A teď zkusíme limity funkcí „počítat"</u> – užití aritmetiky limit

<u>nebo</u>
<u>ukázat, že funkce v daném bodě limitu nemá</u>

(buď, když $\lim\limits_{x\to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a-} f(x)$ v případě $\lim\limits_{x\to a} f(x)$,

nebo užitím Heineho definice limity funkce)

V příkladu 2 (kde je mnoho limit) vyberte z každé skupiny nějaké limity, ostatní můžete zkusit „počítat" sami; a pokud budete mít s limitami „potíže" problém, napište „dotaz" – a můžeme tak „konzultovat".

2a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{-1}{(x+3)^2} = \frac{-1}{4^2}$ (žádný problém – fce $\frac{-1}{(x+3)^2} = f(x)$ je spojitá ve svém def. oboru, tj. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$)

- $\lim\limits_{x\to -3} \frac{-1}{(x+3)^2} = „\frac{-1}{0^+}" = -\infty$

(zde značím 0^+ to, že jmenovatel zlomku má limitu 0 a je kladný v $P(0)$, pak dle věty (a AL) je „$\frac{1}{0^+} = +\infty$")

(Věta: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\exists\, P(a): f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ v $P(a) \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty\ (-\infty)$)

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-1}{(x+3)^2} = „\frac{-1}{\infty}" = 0$ (AL)

- (poznámka – opět do „ " píšu „rozbor" dané situace – – abych pak „viděl", co lze dále „dělat" dle známých pravidel, nebo, zda je zde neurčitý výraz a tedy je třeba pak upravit tak, abychom mohli limitu určit dle pravidel – stejné jako u limit posloupností)

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} = „\dfrac{3}{0}" = (?)$ – dle věty uvedené v předchozím příkladu – potřebujeme „znaménko" jmenovatele x^2-1 v $P(1)$

ale to se mění!

v $P^+(1)$ je $x^2-1>0$ a v $P^-(1)$ je $x^2-1<0$,

tj. $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} = „\dfrac{3}{0+}" = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} = „\dfrac{3}{0^-}" = -\infty$,

tedy funkce $\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$ v bodě $1=x$ oboustrannou limitu nemá!

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} = „\dfrac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 2 \ (AL)$

(podobně jako u limit polynomů)

$\left(\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = „\dfrac{1}{\infty}" = 0 \ AL\right)$

- $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{1-x^2} = „\dfrac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x+2)}{(1+x)(1-x)} =$

opět neurčitý výraz – u limit polynomů bylo jasné – zde návod – „najděte" „nuly"!

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+2}{1-x} = \dfrac{1}{2} \ (AL)$

• $\underline{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}} = „\dfrac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+5)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+5}{(x-1)} =$

$= \dfrac{6}{0}$, ale opět – nyní ale jmenovatel mění v bodě $x=1$ znaménko: $x-1>0$ v $P^+(1)$ a $x-1<0$ v $P^-(1)$, tj:

$\lim\limits_{x\to 1+ (-)} \dfrac{x^2+4x-5}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1+ (-)} \dfrac{x+5}{x-1} = \dfrac{6}{0^{+ (-)}} = +\infty \ (-) \Rightarrow$ <u>daná limita neexistuje</u> (oboustranná)

ale kdyby: $\underline{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{(x-1)^3}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+5}{(x-1)^2} = \dfrac{6}{0^+} = +\infty$

• $\underline{\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{3-x^2}} = „\dfrac{+\infty}{-\infty}" = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{x^2\left(\frac{3}{x^2}-1\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{x\left(\frac{3}{x^2}-1\right)} =$

$= „\dfrac{2}{\infty(0-1)}" = 0 \quad (AL)$

• $\underline{\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3}{3-x^2}} = „\dfrac{\infty}{-\infty}" = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3}{x^2\left(\frac{3}{x^2}-1\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{\frac{3}{x^2}-1} =$

$= „\dfrac{\infty}{-1}" = -\infty \quad (AL)$

a b) • $\underline{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}} = „\dfrac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} =$

(opět – „anidělelnění 0" + „trik")

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)} = \dfrac{1}{2} \quad (AL)$

- ale $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-x}{x} = „\dfrac{1}{0}"$ neexistuje, neboť opět

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x+1}-x}{x} = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{x+1}-x}{x} = -\infty$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1 \quad (\text{AL} + \text{VOLSF}$$

(věta o limitě složené fce)

ale pozor!

- $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1\ !$$

$$(\sqrt{x^2} = |x|\ !)$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) = „\infty-\infty" = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} =$$

(analog. jako u limit posloupností)

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

(AL + VOLSF)

c) (VOLSF)

- $$\lim_{x\to 3+} \exp\left(\frac{1}{3-x}\right) \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{y\to-\infty} e^y = 0$$

$$\lim_{x\to 3+} \frac{1}{3-x} = „\frac{1}{0-}" = -\infty$$

a $\underline{\lim\limits_{x\to 3-} \exp\left(\frac{1}{3-x}\right)}$ $\underset{VLSF}{=}$ $\lim\limits_{y\to+\infty} e^y = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 3-} \frac{1}{3-x} = "\frac{1}{0+}" = +\infty$

tedy, fce $\underline{\exp\left(\frac{1}{3-x}\right)}$ v bodě $x=3$ nemá oboustrannou limitu

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp\left(\frac{1}{3-x}\right) \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{y\to 0} e^y = 1$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{3-x} = "\frac{1}{+\infty}" = 0$, $\exp(y)$ je fce spojitá v $y=0$

- $\underline{\lim\limits_{x\to ?} \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$

?: 1) v lib. bodě $x_0 \neq 1$ je fce spojitá (spojitost složené fce), tak je $\lim \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \exp\left(\frac{1+x_0}{1-x_0}\right)$

2) "zajímavé" limity jsou pro $x\to 1$, $x\to\pm\infty$
("Def. obor dané fce je $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ – tj. "zajímavé" limity jsou v bodech koncových intervalů z Df)

tedy: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{VLSF}{\overset{(*)}{=}} \lim\limits_{y\to-1} e^y = e^{-1}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1+x}{1-x} = "\frac{(\pm)\infty}{(\mp)\infty}" = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = -1 \Big\} \underset{VLSF}{\Longrightarrow} (*)$

$\exp(y)$ je fce spojitá v bodě $x=1$

• $\lim_{x\to 1} \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ opět nebude existovat, neboť má různé jednostranné limity pro $x \to 1\pm$:

$\lim_{x\to 1\pm} \frac{1+x}{1-x} = \text{"}\frac{2}{0\mp}\text{"} = \mp\infty$, a tedy

$\lim_{x\to 1+} \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{y\to-\infty} e^{y} = 0$, $\lim_{x\to 1-} \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{y\to+\infty} e^{y} = +\infty$

• a $\lim_{x\to ?} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ – „kde" bude ?

$\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R};\ 1-x \neq 0 \text{ a } \frac{1+x}{1-x} > 0\} = (-1,1)$

tj. „rozumné" limity jsou pro $x \to -1+$ a pro $x \to 1-$

$\lim_{x\to 1-} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{y\to+\infty} \ln y = +\infty$

$\lim_{x\to 1-} \frac{1+x}{1-x} = \text{„}\frac{2}{0+}\text{"} = +\infty$

a $\lim_{x\to -1+} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{x\to 0+} \ln y = -\infty$

$\lim_{x\to -1+} \frac{1+x}{1-x} = \text{„}\frac{0}{2}\text{"} = 0$ (AL) , a $\frac{1+x}{1-x} > 0$!

• $\lim_{x\to \infty} \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x}(1+e^{-2x})}{e^{x}(1-e^{-2x})} = 1$ (AL) (+VLSF)

a $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim_{y\to-\infty} e^{y} = 0$

• $\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x}+1)}{e^{-x}(e^{2x}-1)} = -1$ (AL+VLSF)

$(\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty)$

d) „víme", že $\underline{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$ (třeba přísně dokážeme, nebo na přednášce)

• pak: $\underline{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5 = 1 \cdot 5 = 5$

$$\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \underset{VLSF}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \right)$$

• $\underline{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}} = „\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} \underset{AL}{=} 1$

• $\underline{\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin \sqrt{x}}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = „1 \cdot \frac{1}{0+}" \underset{(AL)}{=} \infty$

• $\underline{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}} = „\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x + 1} \overset{*}{=}$

„rada" – ? je zde také „schovaná limita $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ – ano!

(v obecnějším příkladu) – je dobré vědět, že, pokud je limita typu $\frac{0}{0}$, a obsahuje goniometrické funkce (nebo i t.zv. cyklometrické – tj. inverzní ke goniometrickým fcím – zatím jsme potkali fce arcsin a arctg), tak někde je schovaná v dané limitě $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}$

$$\overset{*}{=} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{\cos x + 1} \underset{AL}{=} 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad !$$

další příklady v d) zkuste sami!

e) • a pozor! $\underline{\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}} = \text{„}\frac{\text{neexistuje}}{\infty}\text{"} \underset{VOS}{=} 0$,

neboť: $\underset{(\text{pro } x>0)}{0 \le \left|\frac{\sin x}{x}\right|} \le \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \underset{VOS}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$!

• $\underline{\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)} \underset{VLSF}{=} \lim_{y\to 0} \sin y = 0$ (spojitost sinu v $x=0$)

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \text{„}\frac{1}{\infty}\text{"} = 0$

• $\underline{\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ neexistuje – dle Heineho definice:

$\frac{1}{x} \to +\infty$, vezmeme 1) x_n tak, že $\frac{1}{x_n} = n\pi$, tj: $x_n = \frac{1}{n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

pak $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0 \longrightarrow 0$ $(n\to\infty)$

2) $\tilde{x}_n$ tak, že $\frac{1}{\tilde{x}_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{x}_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

pak $f(\tilde{x}_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \longrightarrow 1$ pro $n\to\infty$

„Stejně" se ukáže (ukažte sami), že

• $\underline{\text{fce } f(x) = x \sin x \text{ nemá limitu pro } x \to +\infty}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,(2+\sin x) = +\infty$ (VOS) : (*)

$2+\sin x \geqslant 1$ v R, pak

$$\left.\begin{array}{l} x\,(2+\sin x) \geqq x \text{ pro } x>0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \underset{\text{VOS}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} x\,(2+\sin x) = +\infty \quad (*)$$

<u>Podobně (užití VOS):</u>

- $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\sin x = 0$; $|e^{-x}\sin x| \leq e^{-x}$ pro $x\in R$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (VOS), neboť $0\leq \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$, a $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ (VOS)

<u>A ještě trochu z</u>

f) <u>užití limity: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ („T-tabule")</u> (základní vlastnost exponenciální fce e^x)

! <u>$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$</u> $= \text{„}\frac{0}{0}\text{"} \underset{\text{VLSF}}{=} \lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1} \underset{T}{=} 1$ (také „užitečné vědět")

užijeme toho, že fce $\ln x$ je inverzní k fci e^x a VLSF

$$\ln x = y \iff x = e^y$$

$$\text{a } x\to 1 \Rightarrow y\to 0$$

<u>a také:</u>

(T) <u>$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$</u> $\underset{\text{VLSF}}{=} \lim\limits_{t\to 1}\frac{\ln t}{t-1} = 1$!

$x+1 = t$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{(-x^2)} \cdot \frac{-x^2}{\ln(1-x^2)} =$$

$$\underset{\text{VOLSF} + T}{=} \text{„} 1 \cdot (-1) \cdot 1 \text{"} = -1$$

$$\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \underset{\substack{\text{VLSF} \\ (x^2=t)}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \underset{T}{=} 1 \text{, podobně} \right.$$

$$\left. \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x^2)}{-x^2} \underset{\text{VLSF } (-x^2=t)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \right)$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin 2x} = \text{„}\frac{0}{0}\text{"} = \lim \underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\substack{\to 1 \\ (T)}} \cdot \underbrace{\frac{2x}{\sin 2x}}_{\substack{\to 1 \\ \text{VLSF}+T}} \cdot \frac{1}{2} \underset{AL}{=} \frac{1}{2}$$

Podobně zkuste: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x}$

$$\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} \underset{\text{návod}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x} \text{ a dále} \right.$$

$$\left. \text{„tabulkové limity"} + \text{VLSF} \right)$$

- $$\lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) = \text{„}\infty \cdot (1-1)\text{"} = \left(\begin{array}{l} \text{neurčitý výraz} \\ \infty \cdot 0 \text{ převedeme} \\ \text{na podíl} \end{array} \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{t\to 0+} \frac{e^t-1}{t} \underset{(T)}{=} 1$$

$$\frac{1}{x} = t$$

$$x\to\infty \Rightarrow t\to 0+$$